

Analisi Matematica

Esercitazione della IX settimana

Domanda 1 La successione $a_n = \left(\sin \sqrt[4]{|\sin n|}\right)^{4n}$

- A) non ha limite B) tende a 1 C) tende a 0 D) diverge a $+\infty$

C

Domanda 2 La successione $a_n = \frac{n^3 \sin(\frac{n\pi}{2}) + \cos n}{n^4 + 1}$

- A) non è limitata né inferiormente né superiormente B) ha sia massimo che minimo
C) non ha limite ma è limitata D) è limitata inferiormente ma non ha minimo

B

Domanda 3 la successione

$$a_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) n^4$$

- A) diverge a $-\infty$ B) tende a $\frac{1}{6}$ C) non ha limite D) tende a 0

A

Domanda 4 L'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} : -2n^3 + 2n^2 + n > -2\}$

- A) ha sia massimo che minimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha minimo ma non ha massimo D) ha massimo ma non ha minimo

A

Domanda 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)!}{n! (2n)!} =$$

- A) $+\infty$ B) $e^{\frac{9}{4}}$ C) 0 D) $\frac{3}{2}$

A

Domanda 6 La funzione $F(x) = \int_0^{|x|} t \sin t \, dt$, nel punto $x = 0$

- A) non è continua B) ha un punto angoloso C) è derivabile D) ha un punto di cuspid

C

Domanda 7 Sia $F(x) = \int_1^{(\sin x)^2} \frac{t}{1+t^4} \, dt$. Allora risulta che

- A) F ha un punto di massimo locale per $x = 0$ B) F ha un punto di minimo locale per $x = 1$
C) F ha un punto di massimo locale per $x = 1$ D) F ha un punto di minimo locale per $x = 0$

D

Domanda 8 Sia $F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2+1} \, dt$ allora

- A) $F''(x) = \int_1^{x^2} 2te^{t^2+1} \, dt$ B) $F''(x) = 2e^{x^4+1}(1+4x^4)$ C) $F''(x) = e^{x^4+1} - e^2$ D) $F''(x) = 2x \int_1^x e^{t^2+1} \, dt$

B

Domanda 9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(\sin(t^2)) \, dt =$

- A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $+\infty$ D) non esiste

B

Domanda 10 La funzione $F(x) = \begin{cases} \int_2^x \frac{e^t - 1}{t} \, dt & \text{se } x > 2 \\ x - 2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

- A) è continua ma non derivabile in $x = 2$ B) è derivabile in $x = 2$
C) non è continua in $x = 2$ D) è derivabile ma non è continua in $x = 2$

A

Analisi Matematica

Esercitazione della IX settimana

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

Esercizio 1 Calcolare il limite della seguente successione:

$$a_n = \frac{\log(n!)}{n^2}$$

Soluzione

Utilizzando la maggiorazione $n! \leq n^n$ si ottiene che

$$0 \leq \frac{\log(n!)}{n^2} \leq \frac{\log(n^n)}{n^2} = \frac{n \log n}{n^2} = \frac{\log n}{n}$$

ed essendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$, il teorema dei carabinieri ci garantisce che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Dato che la successione è a termini positivi possiamo applicare il criterio del rapporto.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{n^{2n}} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \frac{(n+1)^{2n} (n+1)^2}{n^{2n}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \rightarrow \frac{e^2}{4} > 1. \end{aligned}$$

Quindi il limite cercato vale $+\infty$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos^2 x \, dx.$$

Soluzione

Calcoliamo prima una primitiva della funzione $x \cos^2 x$ integrando per parti. Integreremo $\cos x$ e deriveremo $x \cos x$.

$$\begin{aligned} \int x \cos^2 x \, dx &= \int (\cos x) (x \cos x) \, dx = \sin x x \cos x - \int \sin x (\cos x - x \sin x) \, dx \\ &= x \cos x \sin x - \int \cos x \sin x \, dx + \int x \sin^2 x \, dx = x \cos x \sin x - \int \frac{\sin(2x)}{2} \, dx + \int x(1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= x \cos x \sin x - \frac{1}{2} \frac{-\cos(2x)}{2} + \int x \, dx - \int x \cos^2 x \, dx = x \cos x \sin x + \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{x^2}{2} - \int x \cos^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Avendo ottenuto di nuovo l'integrale di partenza con il segno opposto, possiamo portarlo al primo membro ottenendo, a meno di costanti additive,

$$2 \int x \cos^2 x \, dx = x \cos x \sin x + \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

Allora risulta

$$\int x \cos^2 x \, dx = \frac{x \cos x \sin x}{2} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x^2}{4}.$$

Per calcolare l'integrale definito basta applicare il teorema di Torricelli ottenendo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos^2 x \, dx = \left[\frac{x \cos x \sin x}{2} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x^2}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{0}{8} + \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{16} - \left(0 - \frac{1}{8} + 0 \right) = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi^2}{64} - \frac{1}{8}.$$